余次元1軌道を持つG- 多様体の同変リプシッツ同相群の構造(変換群の理論とその応用)

阿部, 考順

数理解析研究所講究録
第1569巻2007年132-137

余次元1軌道を持つG-多様体の同変リプシッツ同相群の構造

(On the structure of equivariant Lipschitz homeomorphism group of G-manifolds with codimension 1 orbit.)

信州大学・理学部　阿部 孝順 (Kōjun Abe)
Faculty of Science, Shinshu University
e-mail: kojnabe@shinshu-u.ac.jp

§1.　リプシッツ同相群

この節では可微分多様体のリプシッツ同相群にの完全性について，これまでに知られている結果を述べる。

M, N: 可微分多様体

$f: M \to N$ がリプシッツ写像とは，$\forall p \in M$ に対して p の回りの局所座標 (U, φ) と $f(p)$ の回りの局所座標 (V, ψ) ($f(U) \subset V$) と $K > 0$ が存在して次の条件を満たすことである：

$$|(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) - (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(y)| \leq K|x-y|, \quad (x, y \in \varphi(U)).$$

また f と f^{-1} が共にリプシッツ写像であるときにリプシッツ同相写像であるという。

$L(M)$: コンパクトな台をもつイソトピーで恒等写像とイソトピックな M のリプシッツ同相全体にコンパクト開位相を入れた位相群

コンパクトな台をもつ M のリプシッツ同相全体の集合 $\mathcal{L}(M)$ には次のようにして，コンパクト開リプシッツ位相を入れることができる。

K を M の座標近傍 U に含まれるコンパクト部分集合とする。f を M のリプシッツ同相で $f(K)$ が M の座標近傍 V に含まれるものとする。

$\varepsilon > 0$ に対して $\mathcal{N}(f; (U, \varphi), (V, \psi), K, \varepsilon)$ を次の条件を満たす M のリプシッツ同相 g の集合とする。

(1) $|(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) - (\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(x)| < \varepsilon \quad (x \in K)$.

(2) $|((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) - (\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(x)) - ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(y) - (\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(y))|$
$< \varepsilon|x-y| \quad (x, y \in K)$.

このような集合 $\mathcal{N}(f; (U, \varphi), (V, \psi), K, \varepsilon)$ の系は $\mathcal{L}(M)$ のコンパクト開リプシッツ位相の準基をなす。

$\mathcal{H}_{LIP}(M)$: $\mathcal{L}(M)$ のコンパクト開リプシッツ位相による恒等写像の連結成分

一般に群 G がその交換子群 $[G, G]$ と一致するとき，完全群であるという。

Theorem 1 ([AF2]) $L(M)$, $\mathcal{H}_{LIP}(M)$ は完全群である。

$L(\mathbf{R}^n, \{0\})$ ($\mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}^n, \{0\})$): $\mathbf{R}^n$ の原点を固定するコンパクトな台をもつリプシッツ同相全体の集合にコンパクト開位相 (コンパクト開リプシッツ位相) を入れた位相群の恒等写像の連結成分

Theorem 2 (Tsuboi [TS]) $L(\mathbf{R}, \{0\}) = \mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}, \{0\})$ は完全群である。

Theorem 3 ([AF3]) $\mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}^n, \{0\})$ は完全群である。

§2. 同変リプシッツ同相群

この節では可微分 G-多様体の同変リプシッツ同相群についてこれまでに知られている結果について述べる。

G: コンパクトリー群
M: 可微分 G-多様体
$L_G(M)$ ($\mathcal{H}_{LIP,G}(M)$): 可微分 G-多様体のコンパクトな台をもつ 同変リプシッツ同相全体の集合にコンパクト開位相 (コンパクト開リプシッツ位相) を入れた位相群の恒等写像の連結成分

Theorem 4 ([AF2]) コンパクトリー群 G が M に可微分で自由に作用するとき $L_G(M)$, $\mathcal{H}_{LIP,G}(M)$ は完全群である。

Corollary 5 M が軌道型を唯 1 つもつ可微分 G-多様体ならば $\mathcal{H}_{LIP,G}(M)$ は完全群である。

Theorem 6 ([AF3]) G を有限群として，M を可微分 G-多様体とする。このとき $\mathcal{H}_{LIP,G}(M)$ 完全群である。

$\mathcal{C}(\mathbf{R})$: 次の条件 (L) を満たす $(0, 1]$ 上の実数値関数 f 全体の集合
(L): $K > 0$ が存在して次の条件をみたす；

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{K}{x}(y - x) \quad \text{for } 0 < x \leq y \leq 1.$$

$\mathcal{C}_0(\mathbf{R}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbf{R});\ f \text{ は有界な関数}\}$

群 D の 1 次元ホモロジー群は $H_1(D) = D/[D, D]$ と定義される。

Theorem 7 ([AFM])

$$H_1(L_{U(n)}(\mathbf{C}^n)) \cong \mathcal{C}(\mathbf{R})/\mathcal{C}_0(\mathbf{R}).$$

§3. 余次元 1 軌道を持つ G-線形表現空間の同変リプシッツ同相群

この節では余次元 1 軌道を持つ G-線形表現空間 V の同変リプシッツ同相群 $\mathcal{H}_{LIP,G}(V)$ について考察する。

V: 余次元 1 軌道を持つ G-線形表現空間
余次元 1 軌道を持つ G-線形表現空間の分類は良く知られていて，$\mathcal{H}_{LIP,G}(V)$ の考察には次の 3 つの場合が基本的であることが分かる。

(1) V が $G = \mathbf{Z}_2$ の自明でない 1 次元表現
(2) $V = \mathbf{C}$ が $G = U(1)$ の標準的な 2 次元表現空間
(3) V が $Sp(1)$ の 4 元数体 $\mathbf{H}$ への標準的な 4 次元表現空間

(1) の場合は Theorem 6 により $\mathcal{H}_{LIP,\mathbf{Z}_2}(\mathbf{R})$ は完全群である。(3) の場合は 4 元数体 $\mathbf{H}$ の虚数単位の性質を用いて次が証明される。

Theorem 8 $\mathcal{H}_{LIP,Sp(1)}(\mathbf{H})$ は完全群である。

以下では (2) の場合即ち $V = \mathbf{C}$ を $G = U(1)$ の標準的表現空間の場合を考察する。

$e = (1, 0)$ とおく。
$\pi:\ \mathbf{C} \to \mathbf{C}/U(1)$ 自然な射影
$p:\ \mathbf{C} \to \mathbf{R}_+;\quad p(v) = |v|^2.$
このとき p は同相写像 $\bar{p}:\ \mathbf{C}/U(1) \to \mathbf{R}_+$ を導く。
$P:\ \mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C}) \to \mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}_+)$,

$$P(h)(x) = |h(\sqrt{x}e)|^2 \quad (x \in \mathbf{R}_+)$$

Lemma 9 $P:\ \mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C}) \to \mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}_+)$ は群準同型写像である。

Theorem 2 より $\mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}_+)$ は完全群であるので，$H_1(\mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C}))$ の完全性を調べるには $KerP$ の構造を調べればよい。

$h \in KerP$
$a_h : \mathbf{R}_+ = (0, \infty) \to U(1)$ を次の等式を満たすように定義する。

$$h(x \cdot e) = x a_h(x^2) \cdot e \quad \text{for} \quad x \in \mathbf{R}_+.$$

$E:\ \mathbf{R} \to U(1)$ 指数写像
h は次の条件 (1),(2) を満たすと仮定してよい。

(1) $supp(h) \subset \pi^{-1}((0,1])$
(2) $\varepsilon > 0$ に対して、h はコンパクト開リプシッツ位相で 1_V に ε-close

$\hat{a}_h:\ (0,1] \to \mathbf{R}$ を $E \circ \hat{a}_h = a_h,\ \hat{a}_h(1) = 0$ を満たす写像とする。

Lemma 10 $\hat{a}_h \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R})$.

$\alpha \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ に対して $h_\alpha:\ \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ を次のように定義する。

$$h_\alpha(z) = \begin{cases} ze^{i\alpha(|z|^2)} & (|z| \leq 1) \\ z & (|z| > 1). \end{cases}$$

Lemma 11 $h_\alpha \in \mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C})$.

次の条件をもつ C^∞-関数 $\nu:\ (0,1] \to \mathbf{R}$ をとる。
(0) $0 \leq \nu(x) \leq 1$ $(0 < x \leq 1)$
(1) $supp(\nu) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}[2^{-2k-1}, 2^{-2k-1}3]$
(2) $supp(1-\nu) \subset \bigcup_{k=0}^{\infty}[2^{-2k-2}, 2^{-2k-2}3] \cup [\frac{3}{4},\ 1]$.
(3) $\nu = 0$ on $\bigcup_{k=0}^{\infty}[2^{-2k-3}3, 2^{-2k-1}]$.
(4) $\nu = 1$ on $\bigcup_{k=0}^{\infty}[2^{-2k-2}3, 2^{-2k}]$.
(5) $|\nu'(x)| \leq \dfrac{2^3}{x}$.

$\beta,\ \gamma:\ (0,1] \to \mathbf{R}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \nu(x)\hat{a}_h(x) \\ \gamma(x) &= (1-\nu(x))\hat{a}_h(x) = (\hat{a}_h - \beta)(x). \end{aligned}$$

このとき
(1) β と γ は条件 (L) を満たす。
(2) $h_\beta \circ h_\gamma = h_{\hat{a}_h} = h$.
(3) $supp(\beta) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}[2^{-2k-1}, 2^{-2k-1}3]$.
(4) $supp(\gamma) \subset \bigcup_{k=0}^{\infty}[2^{-2k-2}, 2^{-2k-2}3] \cup [\frac{3}{4}, 1]$.

$\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ に次のように位相を入れる。
$\alpha \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}),\ \varepsilon > 0$ に対して $\mathcal{O}(\alpha;\varepsilon)$ を次の条件を満たす β の集合として、$\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ に $\mathcal{O}(\alpha;\varepsilon)$ を α の ε-近傍とする位相を入れる。
(1) $|\alpha(x) - \beta(x)| < \varepsilon \quad (0 < x \leq 1)$.
(2) $|(\alpha(x) - \beta(x)) - (\alpha(y) - \beta(y))| < \dfrac{\varepsilon}{x}|y - x| \quad 0 < x \leq y \leq 1$

$H:\ \mathcal{C}_0(\mathbf{R}) \to \mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C})$ を $H(\alpha) = h_\alpha$ と定義する。

Lemma 12 H は連続写像である。

Lemma 12 を用いて次が示される。

Proposition 13 $H(\beta)$, $H(\gamma)$ は交換子群 $[\mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C}), \mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C})]$ の閉包に含まれる。

$f \in \mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}_+)$,

$$\Psi_f(v) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{f(|v|^2)}}{|v|}v & (v \neq 0) \\ 0 & (v = 0). \end{cases}$$

Lemma 14 (1) $\Psi_f \in \mathcal{H}_{LIP,G}(V)$.
(2) $\Psi : \mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}_+) \to \mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C})$ を $\Psi(f) = \Psi_f$ と定義すると Ψ は群準同型で $P \circ \Psi = 1_{\mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}_+)}$ を満たす。

Proposition 13 と Lemma 14 から次が証明される。

Theorem 15 $\overline{[\mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C}), \mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C})]} = \mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C})$

Remark 16 (1) Theorem 15 により $\mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C})$ の元が交換子で近似できることを示しているが、交換子で表すことができるかが問題である。

(2) [AF1] において余次元 1 軌道をもつ可微分 G-多様体の同変微分同相群の場合に 1 次元ホモロジー群を求めた。この結果と Theorem 7, Theorem 15 から 1 軌道をもつ可微分 G-多様体の同型群の 1 次元ホモロジー群の構造は考察する圏により大きく異なっていることが分かる。

Remark 17 $\mathbf{R}^n$ の同相群の場合には Mather [Ma] が完全群であることを証明している。また Rybicki [Ry] はコンパクトリー群の自由作用をもつ場合にその同変微分 同相群が完全群であることを証明している。

上記に述べてきた方法を用いて余次元 1 軌道をもつ可微分 G-多様体の同変同相群について完全群であることを示すことができる。

参考文献

[AF1] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms of G-manifolds with codimension one orbit*, Topology, 40 (2001), 1325-1337.

[AF2] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups*, J. Math. Soc. Japan, 53 (2001), 501-511.

[AF3] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups II*, J. Math. Soc. Japan, 55 (2003), 947-956.

[AF4] K. Abe and K. Fukui, *On the first homology of automorphism groups of manifolds with geometric structures*, Central European Jour. Math. 3, (2005), 516 - 528.

[AF5] K. Abe and K. Fukui, *The first homology of the group of equivariant diffeomorphisms and its applications*, preprint.

[AFM] K. Abe, K. Fukui and T. Miura, *On the first homology of the group of equivariant Lipschitz homeomorphisms*, J. Math. Soc. Japan, 58 (2006), 1-15.

[Ma] Mather,J.N., *The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms*, Topology, 10 (1971), 297-298.

[Ry] T. Rybicki, *On commutators of equivariant homeomorphisms*, Topology and its applications, 154(2007), 1561-1564.

[TS] T. Tsuboi, *On the perfectness of groups of diffeomorphisms of the interval tangent to the identity at the endpoints*, Foliations; geometry and dynamics (Warsaw, 2000), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (2002), 421-440.